JEM: Jurnal Edumatika (Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Matematika)
1 (1) Juli 2024 11-15
Tersedia secara online di https://ojs.unitas-pdg.ac.id/index.php/edumatika/index

JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU MATEMATIKA
Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Sains Teknologi dan Pendidikan
Universitas Tamansiswa Padang
P-ISSN:XXXX-XXXX | E-ISSN:XXXX-XXXX

Graf Ramsey $(3K_2, 2K_5)$-Minimal
(*On Ramsey* $(3K_2, 2K_5)$-*Minimal Graphs*)

Nailul Yuni Permataputri [1*]
[1] Pendidikan Matematika, Fakultas Sains Teknologi dan Pendidikan, Universitas Tamansiswa – Jl. Tamansiswa No. 9 Kota Padang, Sumatera Barat, Indonesia, 25138
[*] email penulis korespondensi: nailuyuni@gmail.com

Abstrak

Misalkan diberikan graf *G* dan *H* sebarang. Notasi $F\rightarrow (G, H)$ menyatakan bahwa terdapat sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf *F* mengakibatkan *F* memuat subgraf merah graf *G* atau subgraf biru graf *H*. Graf *F* dikatakan graf ramsey *(G,H)*-minimal jika $F\rightarrow (G, H)$ dan untuk setiap sisi pada graf *F* maka $F\text{-}e \nrightarrow (G, H)$. Kelas Ramsey *(G,H)*-minimal dinotasikan $\mathcal{R}(G, H)$. Pada penelitian ini akan ditentukan graf yang termasuk kedalam kelas Ramsey minimal $\mathcal{R}(3K_2, 2K_5)$.

Kata kunci: Graf; Graf lengkap; Graf Ramsey minimal

Abstract

For given two graphs G and H, the notation $F\rightarrow (G, H)$ *means that any red-blue coloring of all the edges of F contains a red copy of G as a subgraph or a blue copy of H as a subgraph. A graph F is Ramsey (G,H)-minimal if* $F\rightarrow (G, H)$ *and for any edge e in F then* $F\text{-}e \nrightarrow (G, H)$. *The class of all (G,H)-minimal graph, is denoted by* $\mathcal{R}(G, H)$. *In this research, we determined graphs in* $\mathcal{R}(3K_2, 2K_5)$.

Keywords: *Graph; Complete graph; Ramsey minimal graph*

Cara mengutip dengan APA 7 style: Permataputri, Nailul Yuni. (2024). Graf Ramsey $(3K_2, 2K_5)$-Minimal. ***JEM: Jurnal Edumatika*** *(Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Matematika)*, *1*(1), 11-15. https://link_artikel_di_JEM_atau_link_doi_artikel.

PENDAHULUAN

Frank Plumptom Ramsey memperkenalkan teori Ramsey dalam tulisannya yang berjudul *On a Problem of Formal Logic* (Ramsey, 2009). Teori ini diaplikasikan oleh Erdos kedalam teori graf. Teori graf merupakan cabang kajian ilmu yang mempelajari sifat-sifat graf. Graf *G* adalah pasangan terurut *(V(G),E(G))* dengan *V(G)* merupakan himpunan titik-titik yang tidak kosong dan *E(G)* merupakan himpunan sisi-sisi.

Graf yang dibahas dalam penelitian ini adalah graf sederhana, berhingga, dan tidak berarah. Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ menyatakan bahwa terdapat sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf *F* mengakibatkan *F* memuat subgraf merah graf *G* atau subgraf biru graf *H*. Graf *F* dikatakan graf Ramsey *(G,H)*-minimal jika $F \rightarrow (G, H)$ dan untuk setiap sisi pada graf *F* maka $F\text{-}e \nrightarrow (G, H)$ (Burr, S. A., 1978).

Terdapat beberapa hasil terdahulu terkait graf Ramsey *(G,H)*-minimal, untuk beberapa *G* dan *H*. Burr dkk (1976) membuktikan bahwa $\mathcal{R}(2K_2, 2K_2) = \{3K_2, C_5\}$ dan $\mathcal{R}(K_{1,2}, K_{1,2}) = \{K_{1,3}, C_{2n+1}\}$ untuk $n \geq 1$, dimana K_t adalah graf lengkap dengan t titik, untuk $t \geq 1$, dan C_s adalah graf siklus dengan s titik, untuk $s \geq 3$. Baskoro dan Yulianti

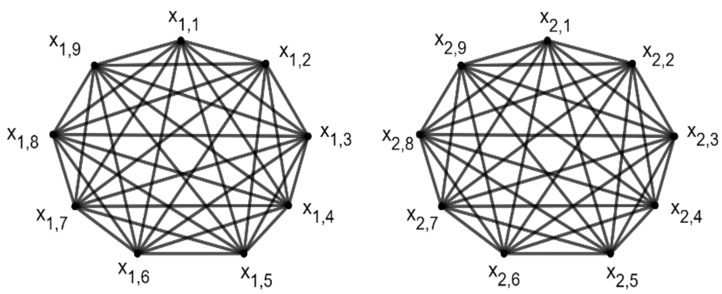
(2011) memberikan beberapa karakterisasi graf yang termasuk kedalam $\mathcal{R}(2K_2, P_n)$ untuk $n \geq 2$, dimana P_n adalah graf lintasan dengan n titik. Baskoro dan Wijaya (2015) menentukan beberapa graf yang termasuk kedalam $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$. Kemudian, Wijaya dkk (Wijaya et al., 2015) (Wijaya, K., Yulianti, L., et al., 2015) memberikan semua graf yang termasuk kedalam $\mathcal{R}(2K_2, K_4)$, $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$. Selanjutnya, Wijaya dkk (2018) menentukan graf yang termasuk kedalam $\mathcal{R}(4K_2, P_3)$. Wijaya dkk (2020) menentukan subdivisi pada graf yang termasuk dalam $\mathcal{R}(mK_2, P_4)$. Silaban dkk (2008) mengkonstruksi graf yang termasuk kedalam $\mathcal{R}\big((m+1)K_2, P_4\big)$. Hadiputra dan Silaban (2021) memberikan *infinite family* yang termasuk dalam $\mathcal{R}\big(K_{1,2}, C_4\big)$. Wijaya dkk (2022) menentukan graf yang termasuk dalam $\mathcal{R}(3K_2, P_5)$. Hasil lain terkait graf matching adalah graf yang termasuk kedalam (Wijaya et al., 2015) $\mathcal{R}(mK_2, P_3)$, (Wijaya et al., 2016) $\mathcal{R}(3K_2, K_3)$, (Tatanto & Baskoro, 2012) $\mathcal{R}(2K_2, 2P_n)$.

Graf lengkap K_n adalah graf terhubung dengan n titik dimana setiap titiknya bertetangga dan setiap titik memiliki derajat $n-1$. Graf $3K_2$ *(matching)* adalah 3 buah graf lengkap dengan 2 titik dan graf $2K_5$ merupakan dua buah graf lengkap dengan 5 titik. Pada penelitian ini akan dicari graf yang termasuk dalam kelas Ramsey minimal $\mathcal{R}(3K_2, 2K_5)$.

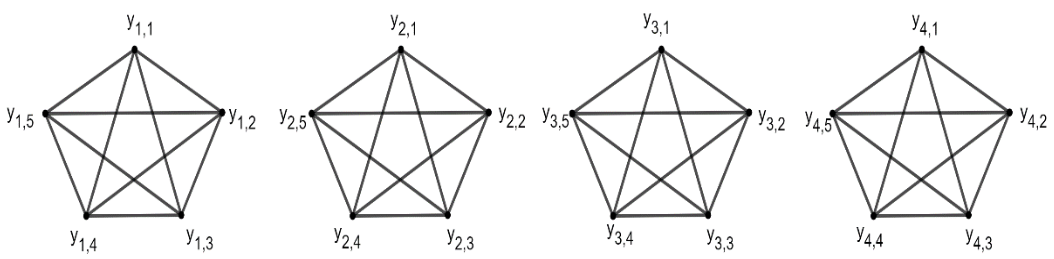
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan diberikan graf yang menjadi anggota kelas Ramsey minimal untuk pasangan graf $3K_2$ dan graf $2K_5$.

Teorema 1. *Jika terdapat graf* $3K_2$ *dan graf* $2K_5$, *maka diperoleh bahwa* $\{2K_9, 4K_5\} \subseteq \mathcal{R}(3K_2, 2K_5)$.



Gambar 1. Graf $2K_9$



Gambar 2. Graf $4K_5$

Bukti.
Himpunan titik dan himpunan sisi dinyatakan sebagai berikut.
$V(2K_9) = \{x_{i,j} \mid 1 \le i \le 2, 1 \le j \le 9\}$
$E(2K_9) = \{x_{i,j}x_{i,k} \mid 1 \le i \le 2, 1 \le j \le 9, 1 \le k \le 9, j \ne k\}$
$V(4K_5) = \{y_{i,j} \mid 1 \le i \le 4, 1 \le j \le 5\}$
$E(4K_5) = \{y_{i,j}y_{i,k} \mid 1 \le i \le 4, 1 \le j \le 5, 1 \le k \le 5, j \ne k\}$

Kasus 1. Akan dibuktikan $2K_9 \to (3K_2, 2K_5)$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi pada graf $2K_9$. Pertama, andaikan terdapat $3K_2$ merah, maka pembuktian selesai. Selanjutkan misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah, sehingga maksimal subgraf merahnya adalah $2K_2$ merah. Jika graf $2K_9$ tidak memuat $3K_2$ merah, maka subgraf merahnya berbentuk $2C_3, 2K_{1,8}, C_3 \cup K_{1,8}$ atau K_5. Perhatikan bahwa $2C_3$ memuat $2K_2$ merah. Andaikan subgraf merahnya berada pada komponen pertama. $2C_3$ memiliki 6 titik, sehingga jumlah titik pada komponen graf yang pertama 9, dikurangi dengan 6 titik pada subgraf merah menyisakan 3 titik. Perhatikan bahwa, terdapat 2 buah graf C_3 sehingga 2 titik ditambah dengan 3 titik tersisa adalah 5 titik yang mana dapat memuat K_5 biru. Kemudian, K_5 biru selanjutnya berada pada komponen kedua. Pembuktian untuk bentuk subgraf lainnya serupa. Akibatnya, $2K_9 \to (3K_2, 2K_5)$.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa $2K_9 \backslash e \nrightarrow (3K_2, 2K_5)$ untuk setiap sisi pada graf $2K_9$. Perhatikan bahwa $2K_9$ memiliki dua komponen, Jika sisi yang dihapus adalah sisi pada graf komponen pertama, maka lakukan pewarnaan pada graf komponen pertama dengan K_5 merah, sehingga tidak terdapat K_5 biru pada komponen pertama. Hanya terdapat satu K_5 biru pada komponen kedua. Akibatnya tidak terdapat $2K_5$ biru pada graf $2K_9 \backslash e$. Pembuktian serupa jika sisi yang dihapus adalah sisi pada komponen kedua. Dengan demikian, tidak terdapat $3K_2$ merah dan $2K_5$ biru pada $2K_9 \backslash e$. Sehingga $2K_9 \backslash e \nrightarrow (3K_2, 2K_5)$, untuk setiap sisi e pada graf $2K_9$.

Kasus 2. Akan dibuktikan $4K_5 \to (3K_2, 2K_5)$. Perhatikan sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi pada graf $4K_5$ yang tidak memuat $3K_2$ merah, sehingga maksimal subgraf merahnya adalah $2K_2$ merah. Jika graf $4K_5$ tidak memuat $3K_2$ merah, maka subgraf merahnya berbentuk $2C_3, 2K_{1,4}, C_3 \cup K_{1,4}$ atau K_5. Perhatikan bahwa $2C_3$ memuat $2K_2$ merah. Graf $4K_5$ memiliki empat komponen. Andaikan subgraf merahnya yaitu dua buah graf C_3 berada pada komponen pertama, maka jelas bahwa terdapat $2K_5$ biru pada 3 sisa komponen. Selanjutnya, andaikan dua buah graf C_3 berada pada dua komponen berbeda, maka terdapat dua sisa komponen yang dapat memuat $2K_5$ biru. Pembuktian untuk bentuk subgraf lainnya, dapat dilakukan dengan cara yang sama Akibatnya, $4K_5 \to (3K_2, 2K_5)$.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa $4K_5 \backslash e \nrightarrow (3K_2, 2K_5)$ untuk setiap sisi pada graf $4K_5$. Perhatikan bahwa $4K_5$ memiliki empat komponen, misalkan keempat komponen itu adalah A, B, C, dan D. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan e berada pada komponen A. Lakukan pewarnaan C_3 merah pada komponen B dan C. Selanjutnya sisi-sisi yang tersisa diwarnai biru. Pewarnaan tersebut akan mengakibatkan tidak terdapat $3K_2$ merah maupun $2K_5$ biru. Sehingga diperoleh $4K_5 \backslash e \nrightarrow (3K_2, 2K_5)$, untuk setiap sisi e pada graf $4K_5$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam artikel ini diperoleh bahwa graf $2K_9$ dan graf $4K_5$ merupakan anggota dari kelas Ramsey minimal untuk pasangan graf $(3K_2, 2K_5)$. Penulis menyarankan untuk peneliti selanjutnya mencari graf lain yang termasuk dalam $\mathcal{R}(3K_2, 2K_5)$.

DAFTAR RUJUKAN

Baskoro, E. T., and Wijaya, K. (2015). On Ramsey $(2\mathrm{K}_2, \mathrm{C}_4)$-Minimal Graphs. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, *98*, pp 11-17.

Baskoro, E. T., & Yulianti, L. (2011). On Ramsey minimal graphs for $2\mathrm{K}_2$ versus P_n. *Advanced and Applications in Discrete Mathematics*, *8*(2), 83–90.

Burr, S. A., Erdos, P., Lovasz, L. (1976). On Graph of Ramsey Type. *Ars Combinatoria*, 167–190.

Burr, S. A., E. (1978). A class of Ramsey-finite graphs, Congr. Numer. *Congr. Numer*, *21*, 171–180.

Hadiputra, F. F., & Silaban, D. R. (2021). Infinite Family of Ramsey $(\mathrm{K}_{1,2}, \mathrm{C}_4)$-minimal Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, *1722*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1722/1/012049.

Ramsey, F. P. (2009). On a Problem of Formal Logic. *Classic Papers in Combinatorics*, 1–24. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4842-8_1.

Silaban, D. R., Taufiq, A. I., Wijaya, K. (2008). On Ramsey $(\mathrm{mK}_2, \mathrm{P}_4)$-Minimal Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, *22*(2), 467–488. https://doi.org/10.1137/050647116.

Tatanto, D., & Baskoro, E. T. (2012). On Ramsey $(2\mathrm{K}_2, 2\mathrm{P}_\mathrm{n})$-minimal graphs. *AIP Conference Proceedings*, *1450*, 90–95. https://doi.org/10.1063/1.4724122.

Wijaya, K., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., Suprijanto, D. (2015). The Complete List of $(2\mathrm{K}_2, \mathrm{K}_4)$-Minimal Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, *3*, 216–227.

Wijaya, K., Yulianti, L., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., Suprijanto, D. (2015). All Ramsey $(2\mathrm{K}_2, \mathrm{C}_4)$-Minimal Graphs. *J. Algorithms Comput.*, *46*, 9–25. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/84297624/article_7922_651e3bc41b32f240cb33e7a9669c32df-libre.pdf?1650166454=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DAll_Ramsey_2_K_2_C_4_Minimal_Graphs.pdf&Expires=1670263574&Signature=Ud26erEc3rI~MidtzGsYz.

Wijaya, K., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., & Suprijanto, D. (2015). On Unicyclic Ramsey (mK_2, P_3)-Minimal Graphs. *Procedia Computer Science*, *74*, 10–14. https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.067.

Wijaya, K., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., & Suprijanto, D. (2016). On Ramsey $(3\mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3)$-Minimal graphs. *AIP Conference Proceedings*, *1707*, 9–25. https://doi.org/10.1063/1.4940826.

Wijaya, K., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., & Suprijanto, D. (2018). On Ramsey $(4\mathrm{K}_2, \mathrm{P}_3)$-minimal graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, *15*(2), 174–186. https://doi.org/10.1016/j.akcej.2017.08.003.

Wijaya, K., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., & Suprijanto, D. (2020). Subdivision of graphs in $\mathrm{R}(\mathrm{mK}_2, \mathrm{P}_4)$. *Heliyon*, *6*(6), e03843. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e03843.

Wijaya, K., Baskoro, E. T., Taufik, A. I., & Silaban, D. R. (2022). On Ramsey Minimal Graphs for a 3-Matching Versus a Path on Five Vertices. *Proceedings of the International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*, *96*, 8–11. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.001